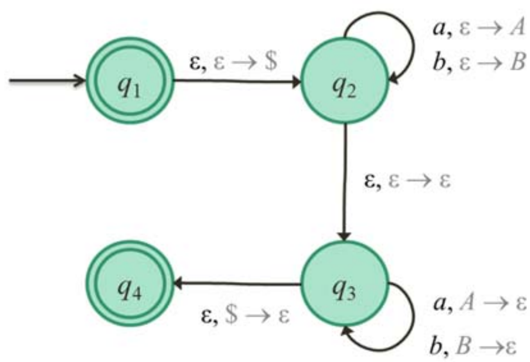
Φροντιστήριο 7 – Λύσεις

Άσκηση 1

Θεωρήστε το πιο κάτω αυτόματο στοίβας:



(α) Να εξηγήσετε με λόγια ποια γλώσσα αναγνωρίζεται από το αυτόματο.

(β) Να δώσετε τον τυπικό ορισμό του αυτομάτου.

(γ) Να δείξετε όλα τα μονοπάτια που αντιστοιχούν στην ανάγνωση των λέξεων *aab* και *aabb.*

(δ) Να δείξετε ότι οι λέξεις *aaaa* και *baab* ανήκουν στη γλώσσα του αυτομάτου.

Λύση

(α) Το αυτόματο αναγνωρίζει τη γλώσσα που περιέχει όλες τις καρκινικές λέξεις (παλίνδρομα) άρτιου μήκους.

(β) Τυπικά το αυτόματο ορίζεται ως εξής: $(\{q_1, q_2, q_3, q_4\},\ \{a, b\},\ \{A, B, \$\},\ \delta, q_1\ , \{q_1, q_4\})$ όπου η συνάρτηση μεταβάσεων δ ορίζεται ως:

$$\delta(q_1, \varepsilon, \varepsilon) = \{(q_2, \$)\}$$

$$\delta(q_2, a, \varepsilon) = \{(q_2, A)\}$$

$$\delta(q_2, b, \varepsilon) = \{(q_2, B)\}$$

$$\delta(q_2, \varepsilon, \varepsilon) = \{(q_3, \varepsilon)\}$$

$$\delta(q_3, a, A) = \{(q_3, \varepsilon)\}$$

$$\delta(q_3, b, B) = \{(q_3, \varepsilon)\}$$

$$\delta(q_3, \varepsilon, \$) = \{(q_4, \varepsilon)\}$$

(γ) Θα δείξουμε τα μονοπάτια αναπαριστώντας τις καταστάσεις με τριάδες της μορφής (q, w,s) όπου q είναι η κατάσταση, w η λέξη προς αναγνώριση και s η στοίβα).

- *aab*
  - $(q_1, aab, \varepsilon) \rightarrow (q_2, aab, \$) \rightarrow (q_2, ab, A\$) \rightarrow (q_2, b, AA\$) \rightarrow (q_2, \varepsilon, BAA\$) \rightarrow (q_3, \varepsilon, BAA\$)$
  - $(q_1, aab, \varepsilon) \rightarrow (q_2, aab, \$) \rightarrow (q_2, ab, A\$) \rightarrow (q_2, b, AA\$) \rightarrow (q_3, b, AA\$)$
  - $(q_1, aab, \varepsilon) \rightarrow (q_2, aab, \$) \rightarrow (q_2, ab, A\$) \rightarrow (q_3, ab, A\$) \rightarrow (q_3, b, \$) \rightarrow (q_4, b, \varepsilon)$

– $(q_1, aab, \varepsilon) \to (q_2, aab, \$) \to (q_3, aab, \$) \to (q_4, aab, \varepsilon)$

- *aabb*
  – $(q_1, aabb, \varepsilon) \to (q_2, aabb, \$) \to (q_2, abb, A\$) \to (q_2, bb, AA\$) \to (q_2, b, BAA\$) \to (q_2, \varepsilon, BBAA\$) \to (q_3, \varepsilon, BBAA\$)$
  – $(q_1, aabb, \varepsilon) \to (q_2, aabb, \$) \to (q_2, abb, A\$) \to (q_2, bb, AA\$) \to (q_2, b, BAA\$) \to (q_3, b, BAA\$) \to (q_3, \varepsilon, AA\$)$
  – $(q_1, aabb, \varepsilon) \to (q_2, aabb, \$) \to (q_2, abb, A\$) \to (q_2, bb, AA\$) \to (q_3, bb, AA\$)$
  – $(q_1, aabb, \varepsilon) \to (q_2, aabb, \$) \to (q_2, abb, A\$) \to (q_3, abb, A\$) \to (q_3, bb, \$) \to (q_4, bb, \varepsilon)$
  – $(q_1, aabb, \varepsilon) \to (q_2, aabb, \$) \to (q_3, aabb, \$) \to (q_4, aabb, \varepsilon)$

(δ) Ακολουθούν μονοπάτια στα οποία το αυτόματο αποδέχεται κάθε μια από τις λέξεις:

- *aaaa*

  $(q_1, aaaa, \varepsilon) \to (q_2, aaaa, \$) \to (q_2, aaa, A\$) \to (q_2, aa, AA\$) \to (q_3, aa, AA\$)$

  $\to (q_3, a, A\$) \to (q_3, \varepsilon, \$) \to (q_4, \varepsilon, \varepsilon)$

- *baab*

  $(q_1, baab, \varepsilon) \to (q_2, baab, \$) \to (q_2, aab, B\$) \to (q_2, ab, AB\$) \to (q_3, ab, AB\$)$

  $\to (q_3, b, B\$) \to (q_3, \varepsilon, \$) \to (q_4, \varepsilon, \varepsilon)$

Άσκηση 2

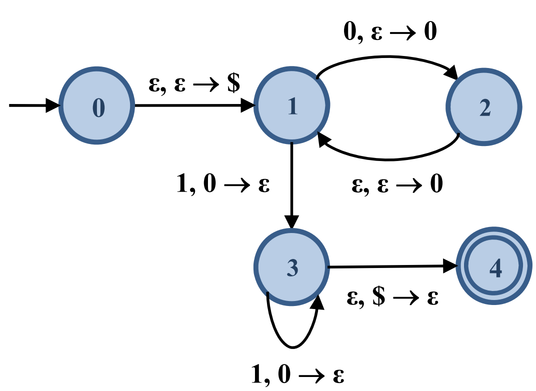
Να κατασκευάσετε αυτόματα που να αναγνωρίζουν τις πιο κάτω γλώσσες.

(α) $\{0^n1^{2n} \mid n > 0\}$

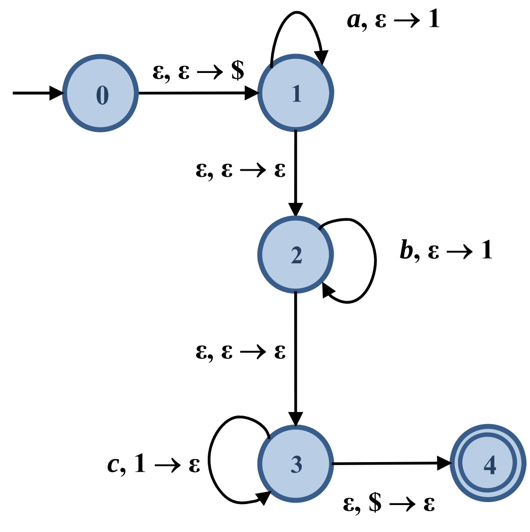
(β) $\{a^ib^jc^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ και } i + j = k\}$

Λύση

(α) Στο πιο κάτω αυτόματο, για κάθε ένα 0 που διαβάζεται στην είσοδο τοποθετούνται δύο 0 στη στοίβα, έτσι ώστε να διασφαλιστεί στη συνέχεια ότι τα 1 που θα ακολουθήσουν θα έχουν διπλάσιο πλήθος από τα 0.



(β)



Άσκηση 3

Για κάθε μια από τις πιο κάτω γραμματικές, να κατασκευάσετε ένα ισοδύναμο αυτόματο στοίβας.

(α) $E \rightarrow E + T \mid T$

$T \rightarrow T \times F \mid F$

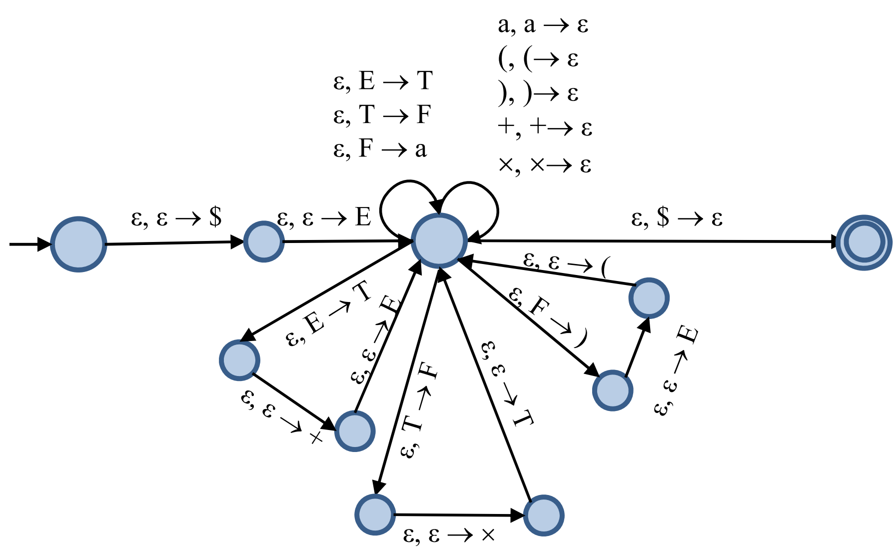
$F \rightarrow (E) \mid a$

(β) $S \rightarrow 1A1 \mid 0A0 \mid 1 \mid 0$

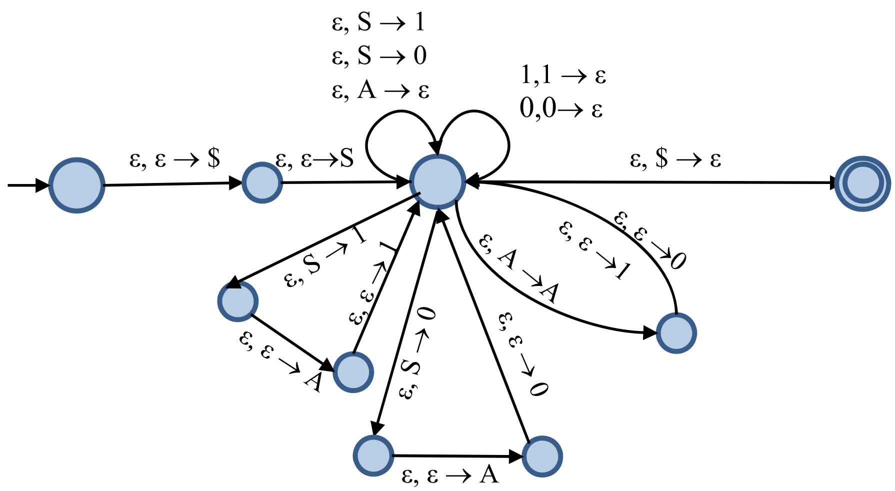
$A \rightarrow 1A \mid 0A \mid \varepsilon$

Λύση

(α)



(β)



Άσκηση 4

Να δείξετε ότι οι πιο κάτω γλώσσες δεν είναι ασυμφραστικές αιτιολογώντας με ακρίβεια τις απαντήσεις σας.

(α) $\{a^n\#a^{2n}\#a^{3n} \mid n > 0\}$

(β) $\{a^ib^jc^k \mid k = \max(i, j)\}$

Λύση

(α) $\{a^n\#a^{2n}\#a^{3n} \mid n > 0\}$

Υποθέτουμε για να φτάσουμε σε αντίφαση ότι η $Λ_1$ είναι ασυμφραστική. Τότε, σύμφωνα με το Λήμμα της Άντλησης, υπάρχει *p*, το μήκος άντλησης της γλώσσας, τέτοιο ώστε κάθε λέξη της γλώσσας με μήκος μεγαλύτερο από *p* να ικανοποιεί την ιδιότητα που περιγράφεται στο λήμμα.

Ας επιλέξουμε τη λέξη $w = a^p\#a^{2p}\#a^{3p}$ και ας ονομάσουμε τα τμήματα της λέξης ως Α, Β, Γ, όπου w = Α#Β#Γ, και Α=a^p , Β = a^{2p} , Γ=a^{3p}.

Τότε, σύμφωνα με το λήμμα, $w = uvxyz$ έτσι ώστε η υπολέξη vxy περιέχει το πολύ *p* σύμβολα ($|vxy| \leq p$), τουλάχιστον μία από τις *v* και *y* να είναι μη κενή ($|vy| > 0$) και οποιαδήποτε ταυτόχρονη επανάληψη των υπολέξεων *v* και *y* να διατηρεί την προκύπτουσα λέξη εντός της γλώσσας ($uv^ixy^iz \in Λ_1$, $i \geq 0$).

Αφού $|vxy| \leq p$, τότε η λέξη αυτή δεν μπορεί να εκτείνεται σε περισσότερα από δύο τμήματα της λέξης. Διακρίνουμε τις πιο κάτω περιπτώσεις.

- Αν η *vxy* εκτείνεται μόνο στο τμήμα Α, τότε τα v και y θα αποτελούνται μόνο από *a*. Επομένως, αν αντλήσουμε τα τμήματα v και y, η λέξη που θα προκύψει δεν θα ανήκει στη γλώσσα μας: $uv^2xy^2z = a^{p+\mu+\lambda}\#b^{2p}\#c^{3p} \notin Λ_1$, για $\mu = |v|$, $\lambda = |y|$.
- Το ίδιο επιχείρημα μπορεί να εφαρμοστεί για να δείξουμε ότι, αν η *vxy* εκτείνεται σε ένα από τα τμήματα Β και Γ τότε, και πάλι, η λέξη δεν επιδέχεται άντλησης.

- Αν η *vxy* ξεκινά από το τμήμα A και εκτείνεται πέραν αυτού, τότε άντληση των τμημάτων v και y θα έχει ως αποτέλεσμα τη μεταβολή του πλήθους των συμβόλων που υπάρχουν στο A, δυνατόν τη μεταβολή του πλήθους των εμφανίσεων του συμβόλου # όπως επίσης και τη μεταβολή του πλήθους των *a* στο τμήμα B. Σε κάθε περίπτωση η προκύπτουσα λέξη δεν θα ανήκει στη γλώσσα αφού το μέγεθος του τμήματος Γ θα παραμείνει σταθερό.
- Το ίδιο επιχείρημα μπορεί να εφαρμοστεί για να δείξουμε ότι, αν η *vxy* ξεκινά από το τμήμα B εκτείνεται πέραν αυτού τότε, και πάλι, η λέξη δεν επιδέχεται άντλησης.
- Τέλος, παρατηρούμε ότι, αν η *vxy* ξεκινά από το σύμβολο #, τότε άντληση των τμημάτων v και y θα έχει ως αποτέλεσμα την μεταβολή των εμφανίσεων του συμβόλου # που συνεπάγεται ότι η λέξη δεν θα ανήκει στη γλώσσα.

Αυτό μας οδηγεί σε αντίφαση και επομένως η υπόθεσή μας ότι η γλώσσα $Λ_1$ είναι ασυμφραστική ήταν εσφαλμένη.

Συμπέρασμα: Η $Λ_1$ είναι μη ασυμφραστική.

(β) $Λ_2 = \{a^i b^j c^k \mid k = \max(i, j)\}$

Υποθέτουμε για να φτάσουμε σε αντίφαση ότι η $Λ_2$ είναι ασυμφραστική. Τότε, σύμφωνα με το Λήμμα της Άντλησης, υπάρχει *p*, το μήκος άντλησης της γλώσσας, τέτοιο ώστε κάθε λέξη της γλώσσας με μήκος μεγαλύτερο από *p* να ικανοποιεί την ιδιότητα του λήμματος.

Ας επιλέξουμε τη λέξη $w = a^p b^p c^p$. Τότε, σύμφωνα με το λήμμα, $w = uvxyz$ έτσι ώστε η υπολέξη *vxy* περιέχει το πολύ *p* σύμβολα ($|vxy| \leq p$), τουλάχιστον μία από τις *v* και *y* να είναι μη κενή ($|vy| > 0$) και οποιαδήποτε ταυτόχρονη επανάληψη των υπολέξεων *v* και *y* να διατηρεί την προκύπτουσα λέξη εντός της γλώσσας ($uv^i xy^i z \in Λ_2$, $i \geq 0$).

Αφού $|vxy| \leq p$, τότε η λέξη αυτή δεν μπορεί να εκτείνεται σε περισσότερα από δύο τμήματα της λέξης. Διακρίνουμε τις πιο κάτω περιπτώσεις.

- Αν η *vxy* εκτείνεται μόνο στο τμήμα a^p, τότε τα v και y θα αποτελούνται μόνο από *a*. Επομένως, αν αντλήσουμε τα τμήματα v και y, η λέξη που θα προκύψει δεν θα ανήκει στη γλώσσα: $w' = uv^2xy^2z = a^{p+\lambda+\mu} b^p c^p$ όπου $\lambda = |v|$, $\mu = |y|$ και προφανώς $w' \notin Λ_2$.
- Το ίδιο επιχείρημα μπορεί να εφαρμοστεί δείχνοντας ότι αν η *vxy* περιέχει μόνο b ή μόνο c, τότε η λέξη δεν θα επιδέχεται άντλησης.
- Αν η *vxy* εκτείνεται στα δύο συνεχόμενα τμήματα a^p και b^p, τότε τα v και y θα αποτελούνται τόσο από a όσο και από b. Επομένως, αν αφαιρέσουμε τα τμήματα v και y, η λέξη που θα προκύψει, $w' = uv^0xy^0z$, δεν θα ανήκει στη γλώσσα μας αφού τα δύο πρώτα τμήματα θα περιέχουν λιγότερα σύμβολα ενώ το τρίτο τμήμα θα εξακολουθεί να περιέχει *p* και όχι max(i,j) c.
- Το ίδιο επιχείρημα μπορεί να εφαρμοστεί δείχνοντας ότι αν η *vxy* εκτείνεται στα συνεχόμενα τμήματα b^p και c^p τότε, και πάλι, η λέξη δεν θα επιδέχεται άντλησης.

Αυτό μας οδηγεί σε αντίφαση και επομένως η υπόθεσή μας ότι η γλώσσα $Λ_2$ είναι ασυμφραστική ήταν εσφαλμένη.

Συμπέρασμα: Η $Λ_2$ είναι μη ασυμφραστική.