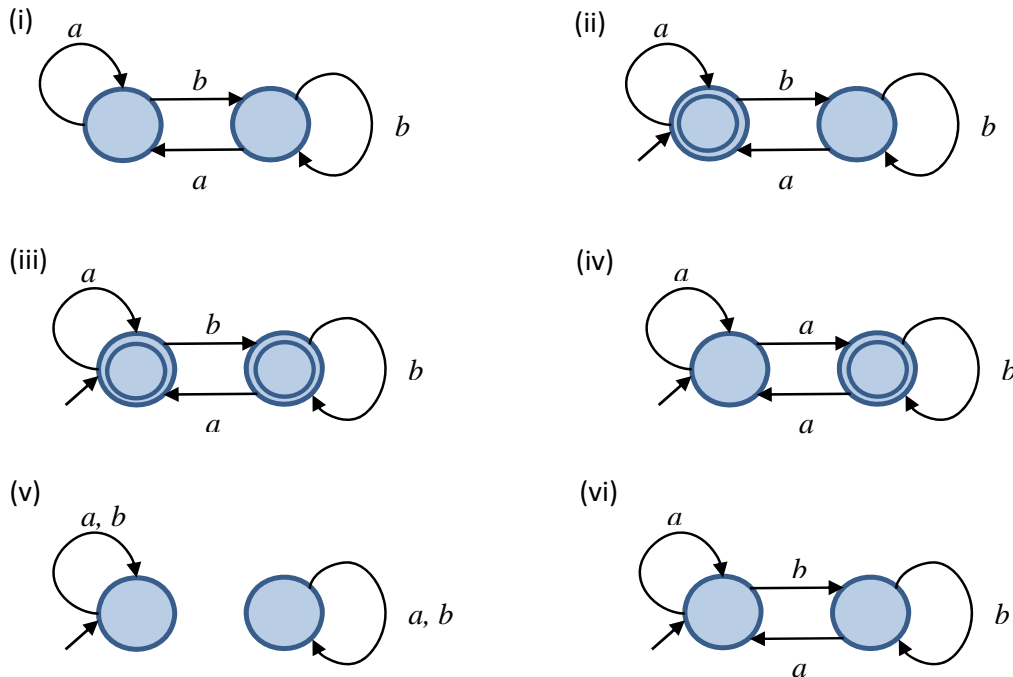


## Φροντιστήριο 2 – Λύσεις

### Άσκηση 1

Ποια από τα πιο κάτω αυτόματα αποτελούν DFA επί του αλφάβητου  $\{a,b\}$ . Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.



### Λύση

- (i) Όχι, δεν υπάρχει αρχική κατάσταση.
- (ii) Ναι, το αυτόματο είναι DFA αφού ικανοποιεί τον σχετικό ορισμό.
- (iii) Ναι, το αυτόματο είναι DFA αφού ικανοποιεί τον σχετικό ορισμό.
- (iv) Όχι, στην αρχική κατάσταση ξεκινούν δυο ακμές με σύμβολο  $a$  και καμιά με  $b$ .
- (v) Ναι, το αυτόματο είναι DFA αφού ικανοποιεί τον σχετικό ορισμό.
- (vi) Ναι, το αυτόματο είναι DFA αφού ικανοποιεί τον σχετικό ορισμό.

### Άσκηση 2

Για κάθε μια από τις πιο κάτω γλώσσες, να κατασκευάσετε αυτόματο επί του αλφάβητου  $\{a,b\}$  που να την αναγνωρίζει. Σε κάθε περίπτωση να δείχνετε (1) τον τυπικό ορισμό του αυτομάτου και (2) το διάγραμμα καταστάσεων.

- (α)  $\{w \mid \eta \ w \text{ αρχίζει από } a \text{ ή τελειώνει σε } b\}$
- (β)  $\{w \mid \eta \ w \text{ περιέχει την υπολέξη } aba\}$
- (γ)  $\{w \mid \eta \ w \text{ αρχίζει με την υπολέξη } aba\}$
- (δ)  $\{w \mid \eta \ w \text{ τελειώνει με την υπολέξη } aba\}$

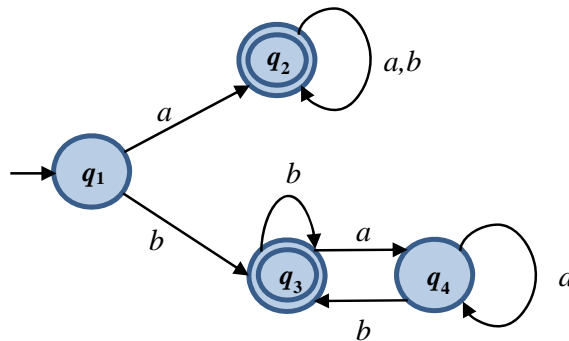
(ε)  $\{w \mid w \text{ δεν περιέχει την υπολέξη } aba\}$

**Λύση**

(α) Το ζητούμενο αυτόματο είναι το  $M = (\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a,b\}, \delta, \{q_1\}, \{q_2, q_3\})$  όπου η σχέση μεταβάσεων  $\delta$  δίνεται στον πιο κάτω πίνακα.

$\delta$	$a$	$b$
$q_1$	$q_2$	$q_3$
$q_2$	$q_2$	$q_2$
$q_3$	$q_4$	$q_3$
$q_4$	$q_4$	$q_3$

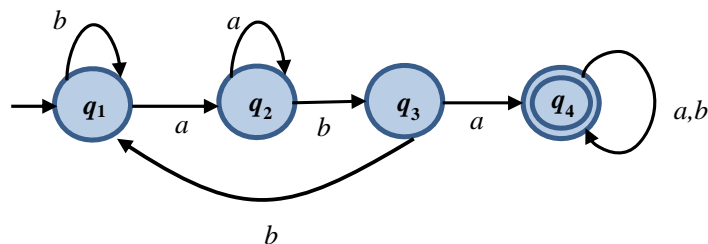
Το διάγραμμα καταστάσεων του αυτομάτου είναι το εξής:



(β) Το ζητούμενο αυτόματο είναι το  $M = (\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a,b\}, \delta, \{q_1\}, \{q_4\})$  όπου η σχέση μεταβάσεων  $\delta$  δίνεται στον πιο κάτω πίνακα.

$\delta$	$a$	$b$
$q_1$	$q_2$	$q_1$
$q_2$	$q_2$	$q_3$
$q_3$	$q_4$	$q_1$
$q_4$	$q_4$	$q_4$

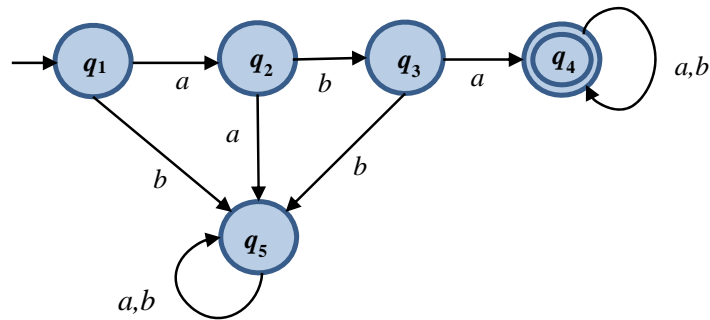
Το διάγραμμα καταστάσεων του αυτομάτου είναι το εξής:



(γ) Το ζητούμενο αυτόματο είναι το  $M = (\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{a,b\}, \delta, \{q_1\}, \{q_4\})$  όπου η σχέση μεταβάσεων  $\delta$  δίνεται στον πιο κάτω πίνακα.

$\delta$	$a$	$b$
$q_1$	$q_2$	$q_5$
$q_2$	$q_5$	$q_3$
$q_3$	$q_4$	$q_5$
$q_4$	$q_4$	$q_4$
$q_5$	$q_5$	$q_5$

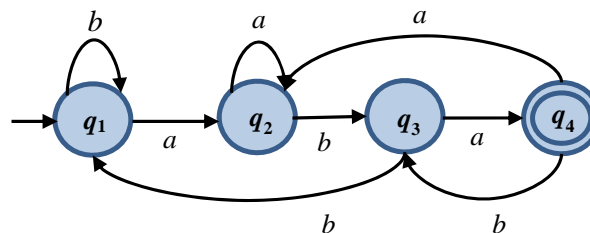
Το διάγραμμα καταστάσεων του αυτομάτου είναι το εξής:



(δ) Το ζητούμενο αυτόματο είναι το  $M = (\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a,b\}, \delta, \{q_1\}, \{q_4\})$  όπου η σχέση μεταβάσεων  $\delta$  δίνεται στον πιο κάτω πίνακα.

$\delta$	$a$	$b$
$q_1$	$q_2$	$q_1$
$q_2$	$q_2$	$q_3$
$q_3$	$q_4$	$q_1$
$q_4$	$q_2$	$q_3$

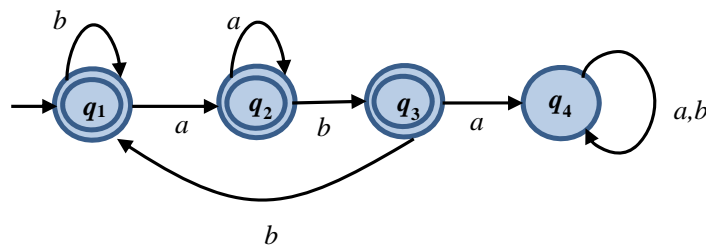
Το διάγραμμα καταστάσεων του αυτομάτου είναι το εξής:



(ε) Το ζητούμενο αυτόματο είναι το  $M = (\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b\}, \delta, \{q_1\}, \{q_1, q_2, q_3\})$  όπου η σχέση μεταβάσεων  $\delta$  δίνεται στον πιο κάτω πίνακα.

$\delta$	$a$	$b$
$q_1$	$q_2$	$q_1$
$q_2$	$q_2$	$q_3$
$q_3$	$q_4$	$q_1$
$q_4$	$q_4$	$q_4$

Το διάγραμμα καταστάσεων του αυτομάτου είναι το εξής:



### Άσκηση 3

Να αποδείξετε ότι κλάση των κανονικών γλωσσών είναι κλειστή ως προς την τομή. Δηλαδή, αν οι γλώσσες  $A$  και  $B$  είναι κανονικές τότε και η γλώσσα  $A \cap B = \{w \mid w \in A \text{ και } w \in B\}$  είναι κανονική.

### Λύση

Η απόδειξη είναι κατασκευαστική. Συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι αν υπάρχουν DFA που αναγνωρίζουν τις γλώσσες  $A$  και  $B$ , τότε υπάρχει DFA που αναγνωρίζει τη γλώσσα  $A \cap B$ .

Ας υποθέσουμε ότι τα αυτόματα  $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$  και  $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$  αναγνωρίζουν τις γλώσσες  $A$  και  $B$  αντίστοιχα. Κατασκευάζουμε το  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  ως εξής:

- $Q = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in Q_1, r_2 \in Q_2\}$
- $\Sigma$ : το αλφάβητο είναι το ίδιο με αυτό των  $M_1$  και  $M_2$ .
- Για κάθε  $(r_1, r_2) \in Q$  και  $a \in \Sigma$ , θέτουμε  

$$\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$$
- $q_0 = (q_1, q_2)$
- $F = \{(r_1, r_2) \in Q \mid r_1 \in F_1 \text{ και } r_2 \in F_2\} = F_1 \times F_2$

Σημειώνουμε ότι το αυτόματο αυτό είναι όμοιο με το αυτόματο που κατασκευάσαμε στη διαφάνεια 2-24 για αναγνώριση της γλώσσας  $A \cup B$ . Διαφέρει μόνο στο σύνολο αποδοχής, όπου θεωρούμε ότι μια κατάσταση  $(r_1, r_2) \in Q$  είναι τελική αν και μόνο αν οι δύο καταστάσεις  $r_1$  και  $r_2$  είναι τελικές στα δύο επιμέρους αυτόματα.

Απομένει να επιβεβαιώσουμε ότι για οποιαδήποτε λέξη  $w$  επί του αλφάβητου  $\Sigma$   
 $w \in L(M)$  αν και μόνο αν  $w \in L(M_1) \cap L(M_2)$ .

Ας υποθέσουμε ότι  $w = w_1w_2\dots w_n \in L(M)$ . Τότε, υπάρχει ακολουθία καταστάσεων  $r_0, r_1, \dots, r_n$  του  $Q$  που ικανοποιεί τις συνθήκες:

1.  $r_0 = q_0$
2.  $\delta(r_i, w_{i+1}) = r_{i+1}$ , για  $i = 0, \dots, n-1$ , και
3.  $r_n \in F$

Επομένως, υπάρχει ακολουθία καταστάσεων  $(s_0, t_0), (s_1, t_1), \dots, (s_n, t_n)$  του  $Q$  όπου για κάθε  $i$ ,  $s_i \in Q_1$ ,  $t_i \in Q_2$  και όπου η ακολουθία αυτή ικανοποιεί τις συνθήκες:

1.  $(s_0, t_0) = (q_1, q_2)$
2.  $\delta_1(s_i, w_{i+1}) = s_{i+1}$ ,  $\delta_2(t_i, w_{i+1}) = t_{i+1}$  για  $i = 0, \dots, n-1$ , και
3.  $s_n \in F_1$ ,  $t_n \in F_2$ .

Κατά συνέπεια, υπάρχει ακολουθία καταστάσεων  $s_0, s_1, \dots, s_n$ , του  $Q_1$  που ικανοποιεί τις συνθήκες

1.  $s_0 = q_1$
2.  $\delta_1(s_i, w_{i+1}) = s_{i+1}$ , για  $i = 0, \dots, n-1$ , και
3.  $s_n \in F_1$

και παρόμοια, υπάρχει ακολουθία καταστάσεων  $t_0, t_1, \dots, t_n$ , του  $Q_2$  που ικανοποιεί τις συνθήκες

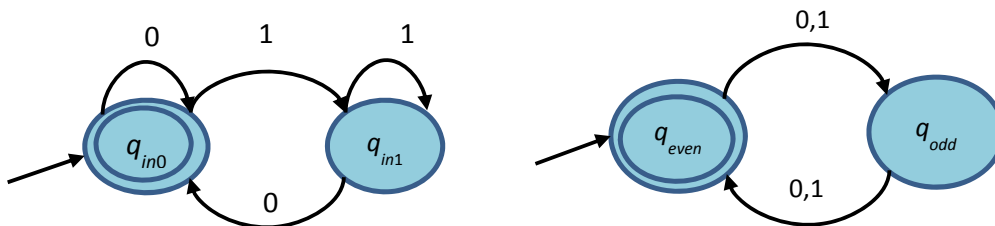
1.  $t_0 = q_2$
2.  $\delta_2(t_i, w_{i+1}) = t_{i+1}$ , για  $i = 0, \dots, n-1$ , και
3.  $t_n \in F_2$

Αυτό συνεπάγεται ότι  $w \in L(M_1)$  και  $w \in L(M_2)$ . Επομένως, αν  $w \in L(M)$  τότε  $w \in L(M_1) \cap L(M_2)$ .

Αντιστρέφοντας τα πιο πάνω επιχειρήματα, λαμβάνουμε ότι αν  $w \in L(M_1) \cap L(M_2)$  τότε  $w \in L(M)$ , και το ζητούμενο έπεται.

#### Άσκηση 4

Χρησιμοποιώντας την κατασκευή σας από την Άσκηση 3, να σχεδιάσετε το διάγραμμα καταστάσεων αυτομάτου που αναγνωρίζει την τομή των γλωσσών των δύο πιο κάτω αυτομάτων.



#### Λύση

