Διάλεξη 16: Σωροί

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθούν τα εξής επιμέρους θέματα:

- Ουρές Προτεραιότητας
- Ο ΑΤΔ Σωρός, Υλοποίηση και πράξεις

Ουρά Προτεραιότητας (Priority Queue)

- Η δομή δεδομένων **Ουρά (Queue)** υποστηρίζει FIFO (first-in first-out) στρατηγική για εισαγωγές και διαγραφές στοιχείων.
- Σε διάφορες εφαρμογές, όμως, **υπάρχει η ανάγκη** επιλογής στοιχείων από κάποιο σύνολο σύμφωνα με κάποια **σειρά προτεραιότητας** (π.χ., σε λειτουργικά συστήματα).
- Σε ουρές προτεραιότητας κύρια σημασία έχει η προτεραιότητα του κάθε στοιχείου, **πρώτο βγαίνει πάντα το στοιχείο με τη μεγαλύτερη προτεραιότητα**.

Εφαρμογές Ουρών Προτεραιότητας

- Scheduling/Load Balancing in OS, Networks
- Interruption Handling
- Event management
- Data Compression: Huffman Coding
- Optimal paths:
  - Dijkstra (stay tuned)
  - A*
- Minimum Spanning Tree in Graphs (stay tuned)
- Hospitals and emergencies
- N-most valuable items in a data-stream

Typical use of Priority Queue

Discrete Simulation

```
// Typical use
while (simulation has not ended)
{
      get next event from the priority queue;
      trigger that event;
}
```

Ουρά Προτεραιότητας (συν.)

- Ουρά Προτεραιότητας
- Ο ΑΤΔ ουρά προτεραιότητας ορίζεται ως μια ακολουθία στοιχείων συνοδευόμενη από τις πράξεις:

  - **Delete_Min*: Διαγράφει το ελάχιστο στοιχείο**
    Θεωρούμε ότι το μικρότερο κλειδί έχει τη μεγαλύτερη προτεραιότητα
    - Εναλλακτικά: Delete Max
  - **Insert: Εισάγει ένα καινούριο στοιχείο**

Υλοποίηση Ουράς Προτεραιότητας

Πιθανές υλοποιήσεις:

1. **Συνδεδεμένη λίστα**
   Insert: O(1), Delete_Min: O(n)

2. **Ταξινομημένη συνδεδεμένη λίστα**
   Insert: O(n), Delete_Min: O(1)

3. **Δυαδικό δένδρο αναζήτησης**
   Insert, Delete_Min: O(log n)

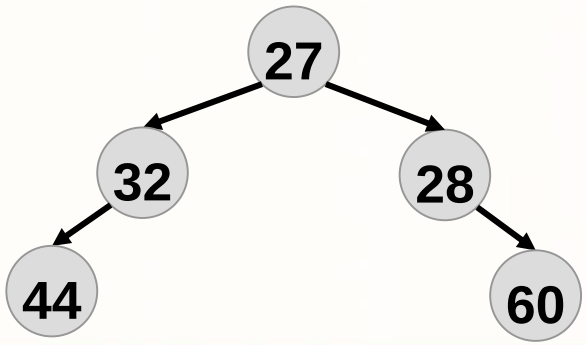
Ερώτηση: Υπάρχει καλύτερη υλοποίηση;

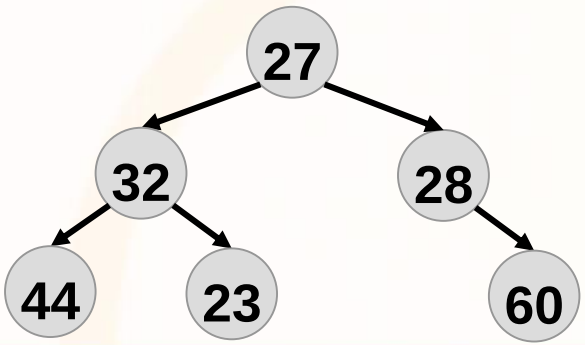
Ναι, μια ενδιαφέρουσα τάξη δυαδικών δένδρων, **οι σωροί.**

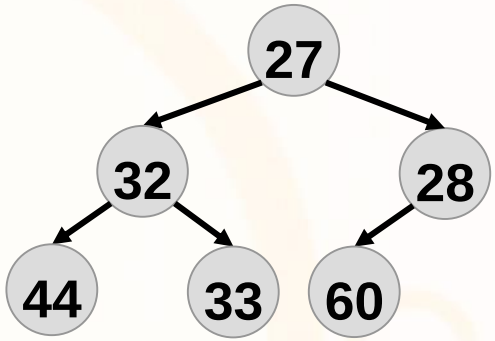
Ο ΑΤΔ Σωρός

Αντίστοιχα μπορούμε να ορίσουμε το MaxHeap

- **Σωρός ελαχίστων (MinHeap)** είναι ένα **δυαδικό δένδρο** που ικανοποιεί:
  1. δομική ιδιότητα: **είναι πλήρες**
  2. ιδιότητα σειράς: **το κλειδί ενός κόμβου είναι μικρότερο από τα κλειδιά των παιδιών του**
- Σε κάθε υπόδενδρο, το μικρότερο στοιχείο βρίσκεται στη ρίζα.
- Δεν υπάρχει καμιά σχέση μεταξύ κλειδιών αδελφών.
- Ποια από τα πιο κάτω δένδρα είναι σωροί;







Πλήρη Δυαδικά Δέντρα

- Σε ένα πλήρες δυαδικό δένδρο, στο επίπεδο k υπάρχουν το πολύ 2^{k-1} κόμβοι.
- Σε ένα πλήρες δυαδικό δένδρο ύψους h όλα τα επίπεδα μέχρι το h-οστό είναι εντελώς γεμάτα, και το επίπεδο h+1 είναι γεμάτο από τα αριστερά στα δεξιά.
- Ο αριθμός των κόμβων μέχρι το επίπεδο h δίνεται από το άθροισμα

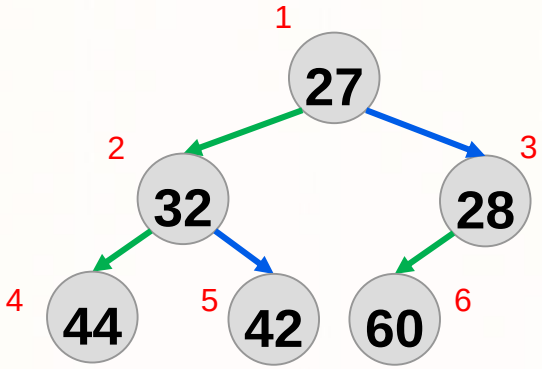
$$\sum_{i=1}^{h} 2^{(\mathrm{i}-1)} = 2^h - 1$$

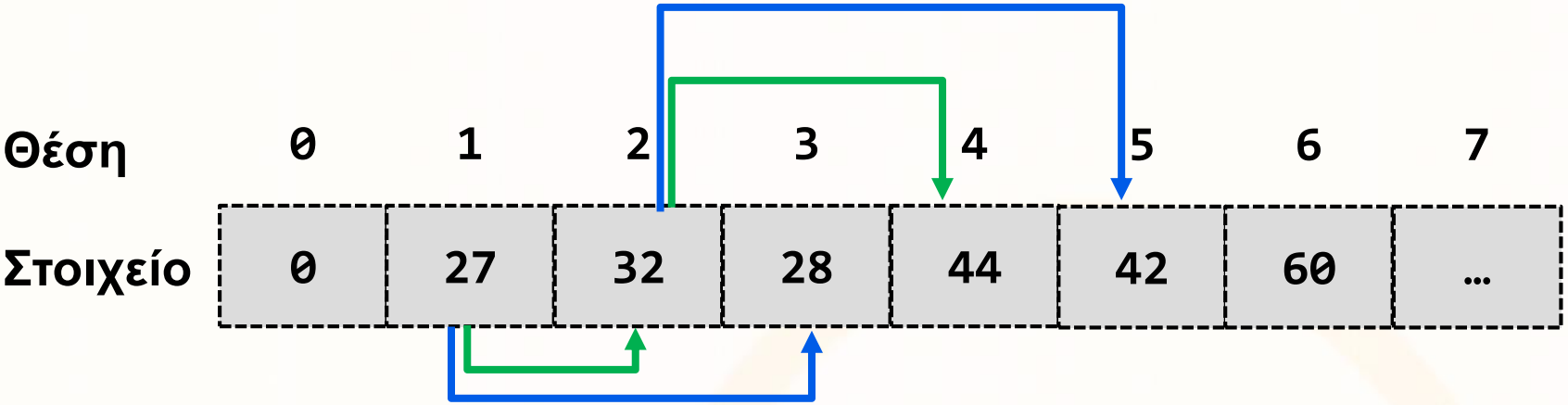
- Επομένως, ένα πλήρες δένδρο ύψους h έχει μεταξύ 2^h και $2^{h+1} - 1$ κόμβους.
- Ένα πλήρες δένδρο με n κόμβους έχει ύψος O(log n).

Υλοποίηση με πίνακες

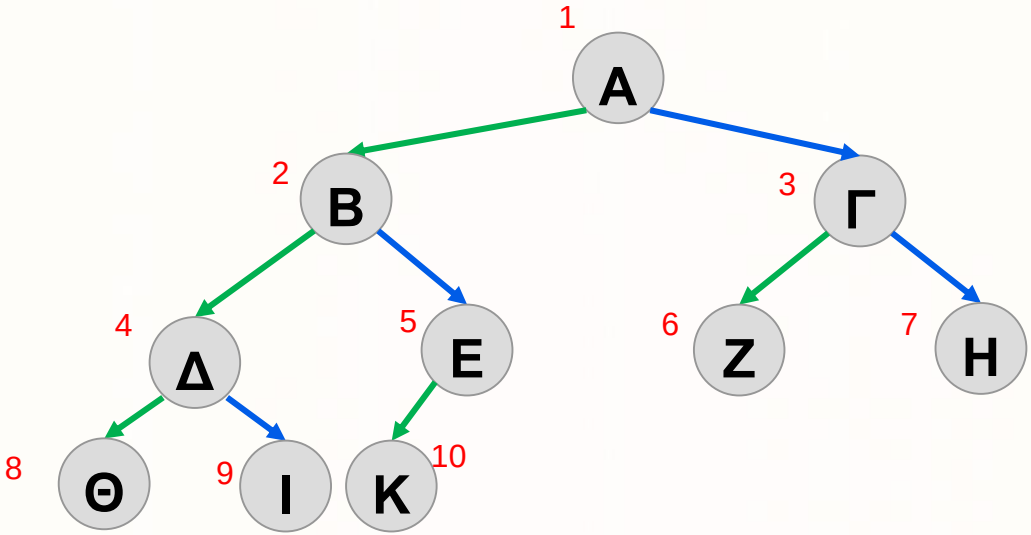
- Ένα πλήρες δυαδικό δένδρο μπορεί να αποθηκευτεί σε πίνακα ως εξής:
  - στη θέση 1 βάζουμε το στοιχείο της ρίζας
  - αν κάποιος κόμβος u βρίσκεται στη θέση i, τότε τοποθετούμε το αριστερό του παιδί στη θέση 2i, και το δεξιό του παιδί στη θέση 2i +1.
- Ο πατέρας ενός κόμβου στη θέση i (εκτός από τη ρίζα) βρίσκεται στη θέση $\lfloor i/2 \rfloor$.
- **Πλεονέκτημα:** Δεν χρειάζονται δείκτες, έτσι εξοικονομούμε μνήμη και έχουμε πιο απλές διαδικασίες.
- **Μειονέκτημα:** πρέπει να γνωρίζουμε από την αρχή το μέγιστο μέγεθος του σωρού.

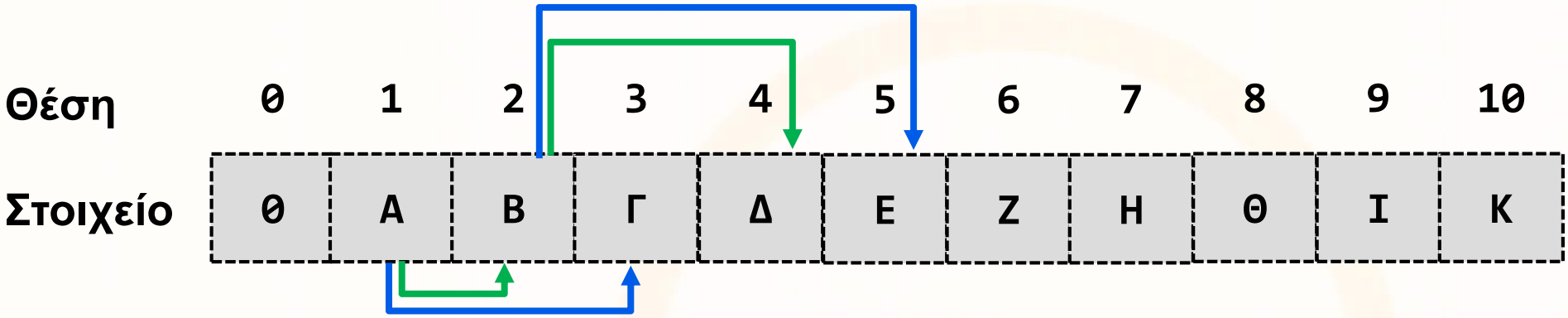
Παράδειγμα αναπαράστασης σωρού





Παράδειγμα αναπαράστασης σωρού





Υλοποίηση Σωρού

- Ένας σωρός μπορεί να υλοποιηθεί ως μια εγγραφή **Heap** με τρία πεδία:

1. **size** (τύπου int): αποθηκεύει το μέγεθος του σωρού.
2. **maxSize** (τύπου int): το μέγιστο μέγεθος του πίνακα,
3. **contents** (τύπου πίνακα): τα στοιχεία του σωρού.

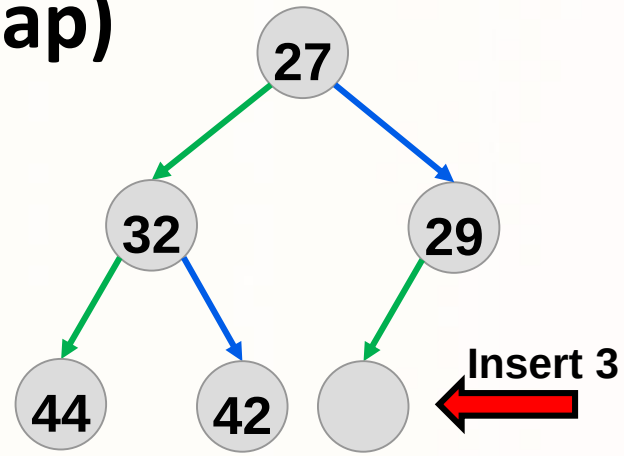
- Αυτή η δομή θα πρέπει να υποστηρίζει τις πράξεις: makeEmpty , isEmpty, isFull, insert, deleteMin.

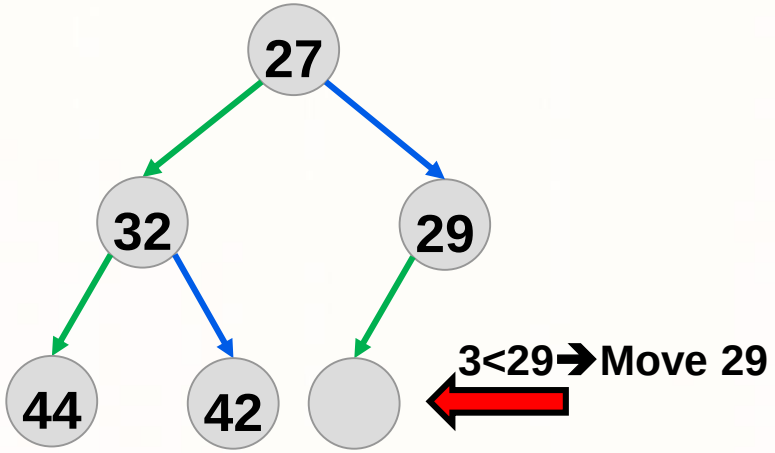
```
public class Heap {

  private int contents[];
  private int size;
  private int maxsize;

  public Heap(int n) {
    this.contents = new int[n];
    this.size = 0;
    this.maxsize = n-1;
}

  public boolean isEmpty(){
    return
       this.size==0;
  }

  public boolean isFull(){
    return
       this.size==this.maxsize;
  }
}
```

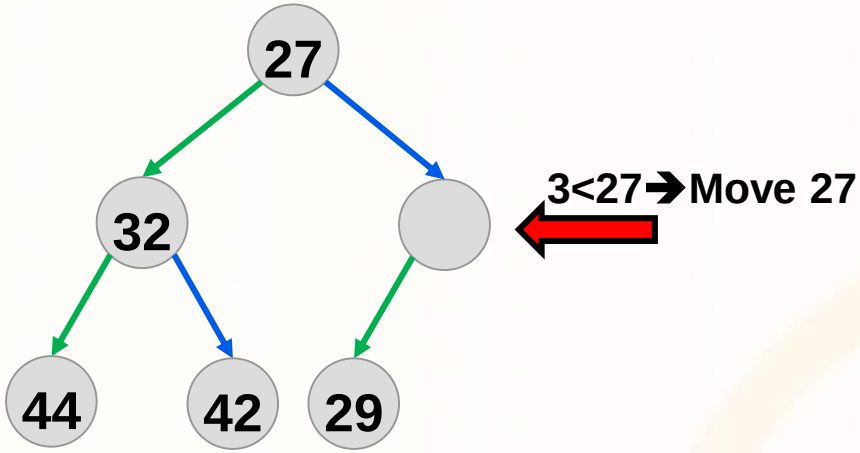
Εισαγωγή κόμβου – (Percolate Up, Swim)

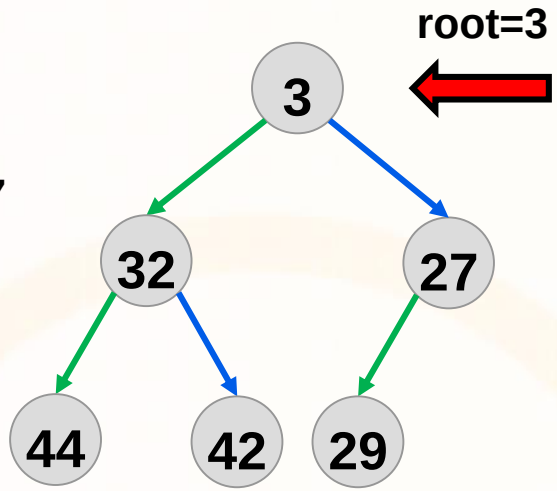
- Σε ένα πλήρες δυαδικό δένδρο υπάρχει μία μόνο θέση όπου μπορεί να εισαχθεί κόμβος και η εισαγωγή να διατηρήσει το δένδρο πλήρες
  - δεξιά στο τελευταίο επίπεδο του δένδρου, και αντιστοιχεί στη θέση size+1 του πίνακα.
- Για να εισάγουμε ένα κλειδί k σε ένα σωρό σκεφτόμαστε ως εξής: Πιθανόν το k να μην μπορεί να μπει στην κενή θέση size+1, γιατί μια τέτοια εισαγωγή να παραβιάζει τη δεύτερη ιδιότητα του σωρού. Έστω ότι η κενή θέση είναι η x, ο πατέρας αυτής της θέσης είναι ο u, και k΄ είναι το κλειδί του u. Τότε εφαρμόζουμε τα εξής:
  1. αν k>k΄, ή, η θέση x αντιστοιχεί στη ρίζα, τότε contents[x] = k
  2. αν k<k΄, τότε βάλε το k΄ στη θέση x, και ανάλαβε να γεμίσεις τη θέση u, δηλαδή contents[x] =k΄; x=u; και
  3. επανάλαβε τη διαδικασία.
- Αυτή η διαδικασία σύγκρισης με τον πατρικό κόμβο και αναρρίχησης μπορεί να συνεχιστεί μέχρι τη ρίζα του δένδρου → Known as **Percolate Up or Swim**

Παράδειγμα 1: Εισαγωγή σε Σωρό Ελαχίστων (Min Heap)









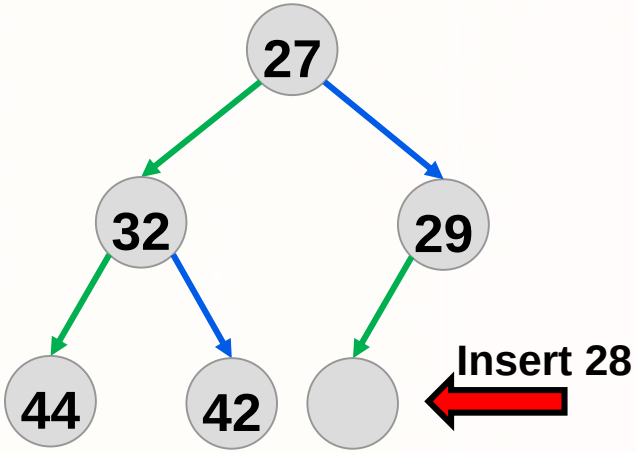
0	1	2	3	4	5	6	7
0	3	32	27	44	42	29	…

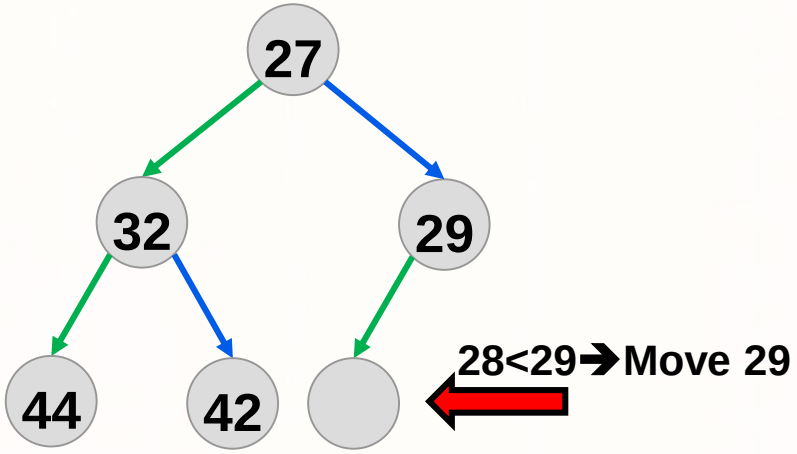
Σωρός με Στατική Δέσμευση Μνήμης: Υλοποίηση

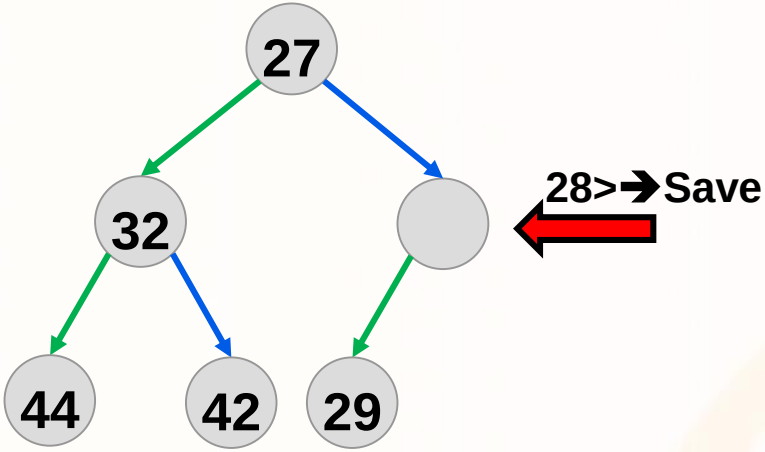
- Συνάρτηση `public void insert(int k);` :

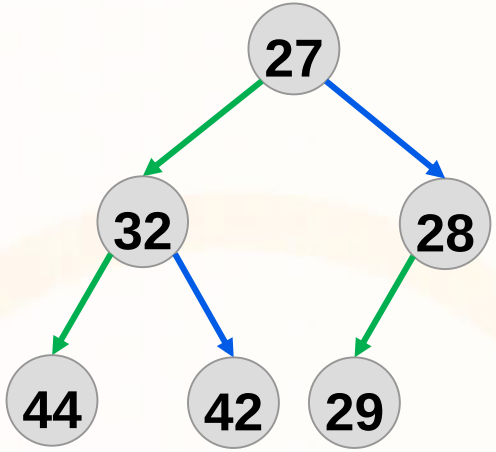
```
public void insert(int k) {

  if (this.size < this.maxsize) {
    int index = this.size + 1;

    while (index > 1 && this.contents[(index / 2)] > k) {
      this.contents[index] = this.contents[(index / 2)];
      index = index / 2;
    }

    this.contents[index] = k;
    this.size++;

    this.contents[0] = this.size;
  }
}
```

Παράδειγμα 2: Εισαγωγή σε Σωρό







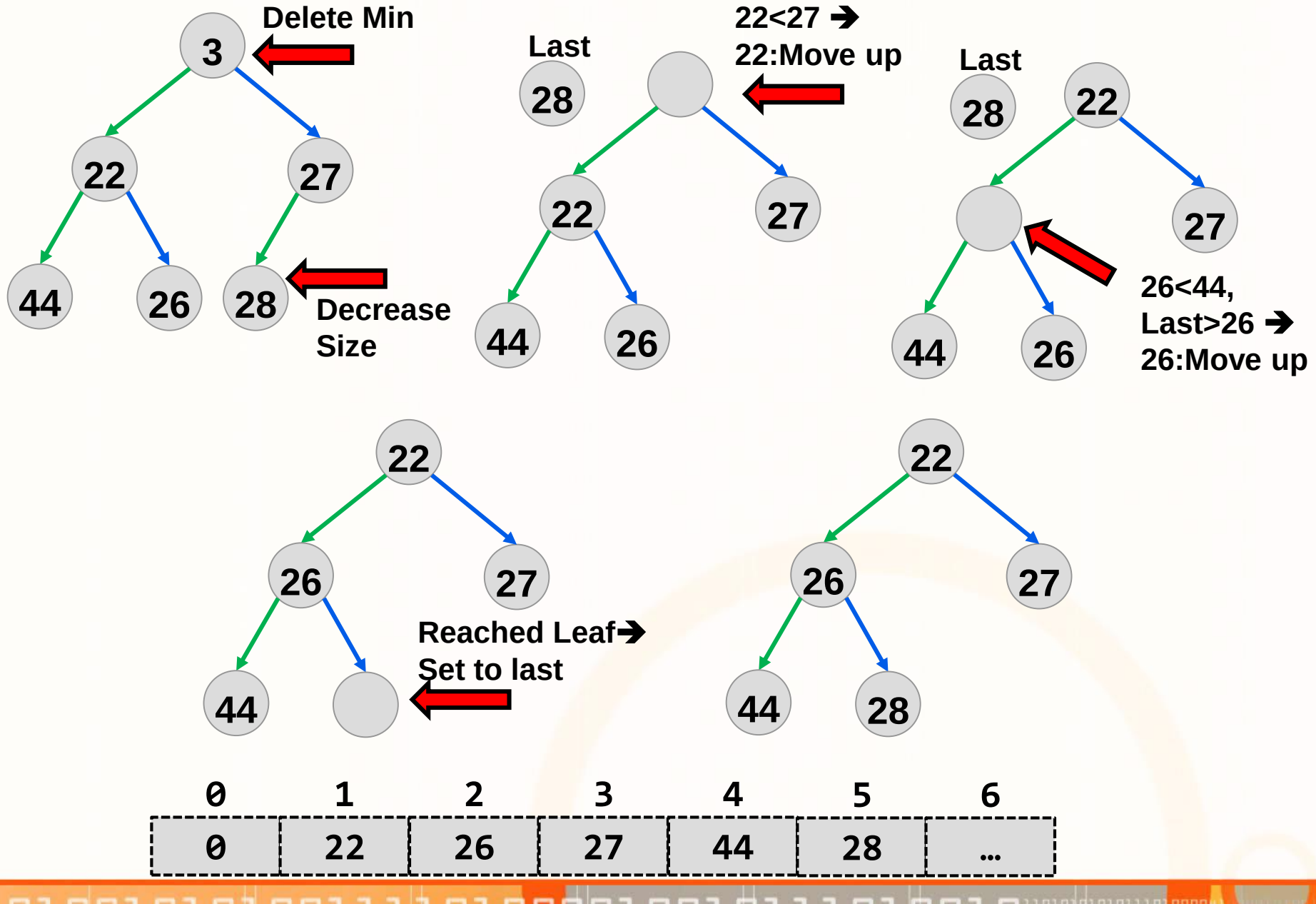


0	1	2	3	4	5	6	7
0	27	32	28	44	42	29	…

Διαγραφή Ελάχιστου Στοιχείου (Percolate Down, Sink)

- Το ελάχιστο στοιχείο βρίσκεται πάντοτε στην κορυφή και η διαγραφή του προκαλεί μια κενή θέση στη ρίζα.
- Θα πρέπει να κατεβάσουμε αυτή την κενή θέση προς τα κάτω και δεξιά → Known as **Percolate Down or Sink**.
- Σε κάθε βήμα ελέγχουμε τα παιδιά της εκάστοτε κενής θέσης.
  Έστω ότι x είναι η κενή θέση:
  1. Αν το κλειδί που βρίσκεται στην τελευταία θέση του σωρού είναι μικρότερο από τα κλειδιά των παιδιών του x τότε μεταφέρουμε το κλειδί αυτό στην κενή θέση και μειώνουμε το μέγεθος του σωρού contents [x] = contents [size]; size--;
     και τερματίζουμε τη διαδικασία.
  2. Διαφορετικά, διαλέγουμε το παιδί u του x το οποίο έχει το μικρότερο κλειδί, μεταφέρουμε το κλειδί του u στο x και κάνουμε κενή θέση τη u: contents[x] = u; x = u
  3. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία.

Παράδειγμα 3: Εξαγωγή από Σωρό

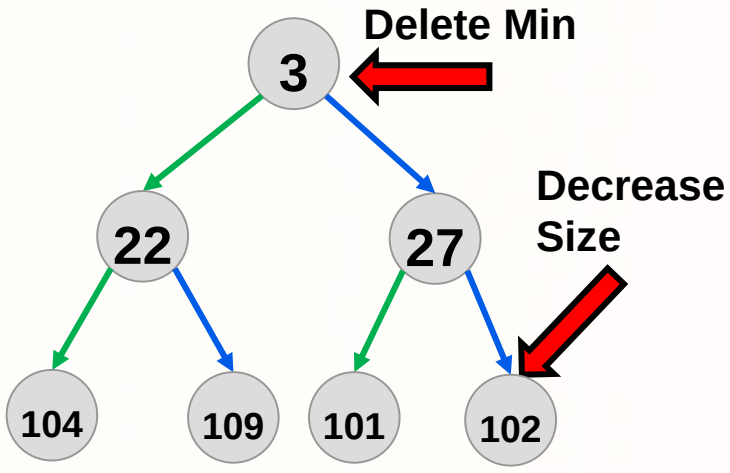


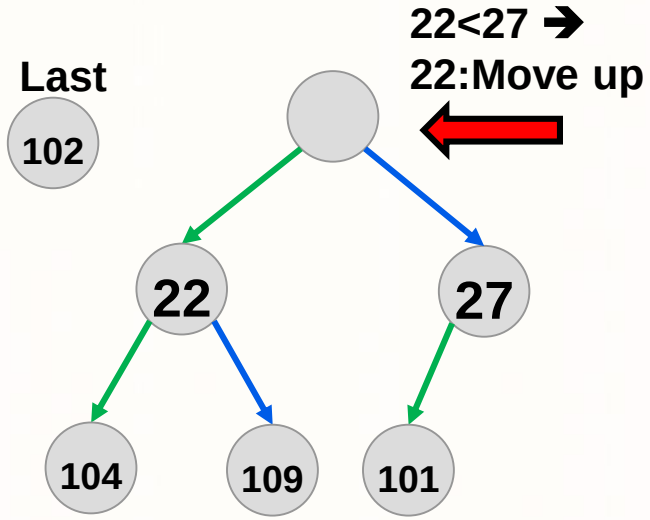
Σωρός με Στατική Δέσμευση Μνήμης: Υλοποίηση

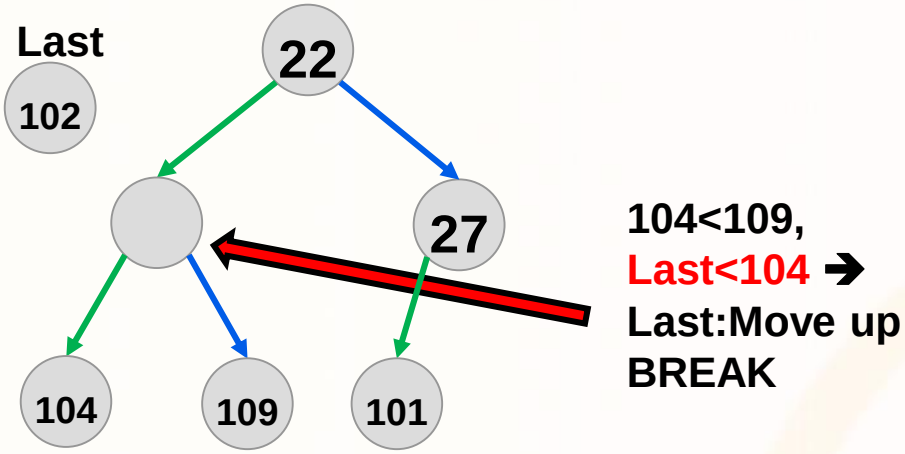
- Συνάρτηση `public int deleteMin()` :

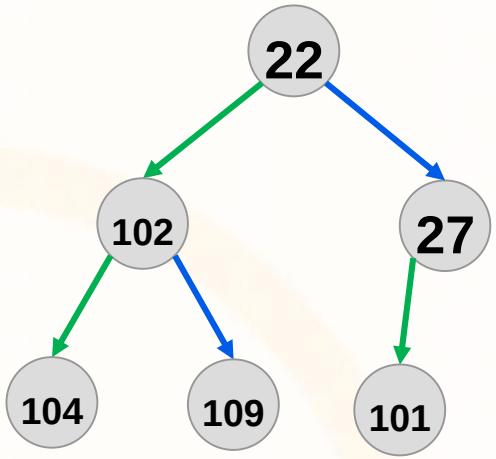
```
public int deleteMin() {
  int min = 0, last;
  int x = 1, child = 0;

  if (!isEmpty()) {
    min = this.contents[1];
    last = this.contents[this.size];
    this.size--;
    this.contents[0] = this.size;

    while ((x * 2) <= this.size) {
      child = x * 2;
      if (child != this.size
          && this.contents[child + 1] < this.contents[child])
        child++;
      if (last > this.contents[child]) {
        this.contents[x] = this.contents[child];
        x = child;
      }
      else break;
    }
    this.contents[x] = last;
  }
  return min;
}
```

Παράδειγμα 4: Εξαγωγή από Σωρό









0	1	2	3	4	5	6
0	22	102	27	104	109	101

Μερικά Σχόλια

- Ο χρόνος εκτέλεσης των διαδικασιών InsertHeap και DeleteMin είναι της τάξης O(h) δηλαδή O(log n).
  (h: ύψος, n: αριθμός κόμβων)
- Ποιο είναι το όφελος της δομής σε σύγκριση με δυαδικά δένδρα αναζήτησης;
- Οι σωροί χρησιμοποιούνται ευρέως σε λειτουργικά συστήματα, συστήματα όπου γίνεται διαμερισμός του χρόνου του υπολογιστή σε > 1 εργασίες (task scheduling) και σε μεταγλωττιστές.
- Συμμετρικά, μπορούμε να ορίσουμε τη δομή maxHeap, όπου η ρίζα περιέχει το μέγιστο στοιχείο.
- Εκτός από δυαδικούς σωρούς, μπορούμε να ορίσουμε τους δ-σωρούς (d-heaps), όπου κάθε κόμβος έχει d παιδιά.

Priority Queues in the wild

- Java: Min-Heap implementation
  - https://docs.oracle.com/javase/10/docs/api/java/util/PriorityQueue.html

```
import java.util.*;

…

// Creating empty priority queue
PriorityQueue<String> toLearn = new PriorityQueue<String>();
// Adding items to the pQueue using add()
toLearn.add("C");
toLearn.offer("C++");
toLearn.add("Java");
toLearn.add("Python");

// Remove the element with min value
toLearn.poll();
```